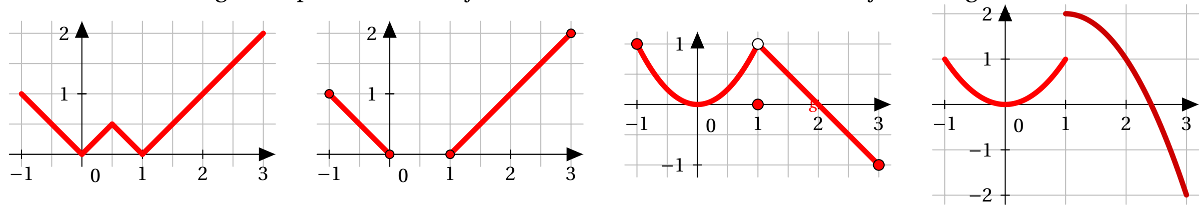
Continuité de fonction

Exercice 1 Dans chaque repère ci-dessous, la courbe tracée représente une fonction f.

1. Déterminer les intervalles où f est continue.
2. Donner l'image de 1 par la fonction f. Coïncide-t-elle avec les limites de f en 1, à gauche et à droite ?



Exercice 2 Soit la fonction f définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Représenter graphiquement f à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.
3. Étudier la continuité de f sur $\mathscr{D}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2x-1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. La fonction f est-elle continue en -1 ?
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x)$.

Exercice 4 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2+\sqrt{5} & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{9+4\sqrt{5}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$. est-elle continue en 0 ?

Théorème des valeurs intermédiaire

Exercice 5 Soit la fonction f définie sur $I = [-4\,;\,1]$ par : $f(x) = x^3+6x^2+9x+3$ dont les variations sont données par le tableau suivant :

x	-4		-3		-1		1
f	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	19

1. Justifier que f est continue sur I.
2. Dénombrer les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
3. a. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α.
   b. Déterminer un encadrement de α à l'unité près.

Exercice 6 Soit la fonction f définie sur $[-1\,;\,3]$ par : $f(x) = 0{,}4x^5 - 8x - 3$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;\,3]$.
3. Chercher une valeur approchée de cette solution à l'aide d'une calculatrice (arrondir à 0,01 près).

Exercice 7

1. Montrer que l'équation : $-2x^3 - 6x^2 + 18x + 59 = 0$ admet une unique solution réelle α.
2. Avec une calculatrice, encadrer α au dixième près.

Exercice 8 Soit f la fonction polynôme de degré 2 : $f : x \longmapsto 4x^2 - 8x + 7$.

1. Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ en fonction de la valeur réelle de k.

Exercice 9 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

Exercice 10 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - x^2 + x + 2$ et $g(x) = x + 2$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une solution unique α dans $[-1\,;\,0]$. Qu'en est-il sur $\mathbb{R}$?
3. Donner un encadrement de α à 0,001 près à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 11 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 4$.

1. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -4$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Donner, en justifiant, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -12$.
4. Existe-t-il un réel y tel que l'équation $f(x) = y$ n'ait aucune solution ?

Exercice 12 Montre que l'équation $2\,\mathrm{e}^{2x} = \sqrt{5-x}$ admet une unique solution α sur $]-\infty ; 5]$ et que $\alpha \in [0;1]$.

Exercice 13 Montre que l'équation $2(x-1)\,\mathrm{e}^{x-1} = x^2$ admet une unique solution α sur $]\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [1,7;1,8]$.

Exercice 14 Voici un programme écrit en Python. Expliquer, en justifiant, à quel problème permet de répondre ce programme.

```
from math import*
def f(x):
  return exp(x)-2
def fct(a,b,eps):
  while b-a > eps:
    m =(a+b)/2
    if f(a)*f(m) <=0:
      b=m
    else:
      a=m
  return a,b
```

Exercice 15 Une boite cylindrique de rayon 12 cm contient de l'eau jusqu'à une hauteur de 5 cm. On immerge une boule métallique dans ce récipient et on constate que la surface de l'eau est tangente à la boule. On désigne par x le rayon de la boule en millimètre.

1. a. Démontrer que $25 \leqslant x \leqslant 120$.
   b. Démontrer que x est solution de l'équation : $x^3 - 21\,600x + 540\,000 = 0$ (E)
2. a. Démontrer que l'équation (E) admet deux solutions positives α et β telles que : $\alpha \in [25,6 ; 26]$ et $\beta \in [125 ; 135]$.
   b. Déterminer alors une valeur approchée du rayon de la boule à 0,1 mm près.

Exercice 16 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm). Le but de ce problème est l'étude de la fonction f et la résolution graphique d'une équation à partir de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ représentative de f.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]2,1 ; 2,2[$ tel que $g(x) = 0$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
3. Étudier le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Étude de la fonction $\boldsymbol{f}$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$: $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction.
4. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$: $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
   b. En déduire que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique $(\mathscr{D})$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à $(\mathscr{D})$.
5. Tracer la droite $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Tracer sa courbe représentative dans un repère.
5. a. Montrer que, pour tout $y \in]0 ; 1]$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution α dans $[0 ; +\infty[$.
   b. Exprimer α en fonction de y.

Exercice 18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que, pour tout k, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution réelle que l'on notera α_k.
4. Déterminer un encadrement de α_1 à 10^{-2} près.
5. Déterminer un encadrement de α_{10} à 10^{-2} près.

Application aux suites

Exercice 19 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6}{u_n + 1}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Vérifier que si $x \in [0;6]$, alors $f(x) \in [0;6]$.
3. On admet que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [0;6]$. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 20 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 21 Soient f une fonction continue sur I, (u_n) une suite d'éléments de I et $v_n = f(u_n)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.
2. Quel lien peut-on alors faire entre la limite de (u_n) et celle de f ?

Exercice 22 Soient f la fonction continue et définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier les variations de f.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. a. Montrer, par récurrence, que (u_n) est une suite positive et décroissante.
   b. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 23 On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{u_n + 1}{e^{u_n}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 3 - \dfrac{x+1}{e^x}$ pour $x \in [0;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution α sur $[0;+\infty[$.
3. Déterminer, en utilisant la méthode par balayage, un encadrement de α à 10^{-3} près.
4. Montrer, par récurrence sur n, que (u_n) est croissante et majorée par α.
5. Justifier que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}/1$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$. On a $u_0 = 1{,}5$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[1;2]$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \in [1;2]$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \in [1;2]$.
4. Étudier les variations de la suite (u_n).
5. En déduire la convergence de (u_n) et déterminer alors sa limite.